Statistique 3
2019-2020. Exercices d'entraînement : Approche Asymptotique (3)

Exercice 1 Une inégalité de Cauchy-Schwarz pour l'ordre de Loewner, cas discret

Soient $a_1, \ldots, a_q$ et $b_1, \ldots, b_q$ deux familles de vecteurs de $\mathbb{R}^d$ $(d, q \geq 1)$. Supposons que $B := \sum_{i=1}^q b_i b_i^\top$ est inversible. On cherche à démontrer l'inégalité suivante, au sens de l'ordre de Loewner:

$$\sum_{i=1}^q a_i b_i^\top \left(\sum_{i=1}^q b_i b_i^\top \right)^{-1} \sum_{i=1}^q b_i a_i^\top \preceq \sum_{i=1}^q a_i a_i^\top.$$

1. Montrer que nécessairement, $q \geq d$.
2. Soit $C \in \mathbb{R}^{q \times q}$ la matrice de Gram de $b_1, \ldots, b_q$ associée au produit scalaire induit par la matrice symétrique définie positive B^{-1}, i.e., $C_{i,j} = b_i^\top B^{-1} b_j, i, j = 1, \ldots, q$. Montrer que C est une matrice de projection.
3. Pour tout $x \in \mathbb{R}^d$, montrer que $x^\top \sum_{i=1}^q a_i b_i^\top \left(\sum_{i=1}^q b_i b_i^\top \right)^{-1} \sum_{i=1}^q b_i a_i^\top x$ peut s'écrire sous la forme $y^\top C y$, pour un certain vecteur $y \in \mathbb{R}^q$ qu'on déterminera.
4. Conclure.

Exercice 2 Une inégalité de Cauchy-Schwarz pour l'ordre de Loewner, cas général

Soient a et b deux vecteurs aléatoires de taille d $(d \geq 1)$ définis sur un même espace de probabilité, tels que $\mathbb{E}[\|a\|^2 + \|b\|^2]$ est finie.

1. Montrer que $\mathbb{E}[aa^\top]$, $\mathbb{E}[bb^\top]$ et $\mathbb{E}[ab^\top]$ sont bien définies, et que $\mathbb{E}[ab^\top]$ et $\mathbb{E}[ba^\top]$ sont les matrices transposées l'une de l'autre.
   Dans toute la suite de l'exercice, on supposera que $\mathbb{E}[bb^\top]$ est inversible, et on souhaite démontrer l'inégalité suivante:
   $$\mathbb{E}[ab^\top]\mathbb{E}[bb^\top]^{-1}\mathbb{E}[ba^\top] \preceq \mathbb{E}[aa^\top]$$
   au sens de l'ordre de Loewner pour les matrices symétriques réelles.
2. Montrer que l'inégalité démontrée dans l'exercice précédent est un cas particulier de l'inégalité qu'on souhaite démontrer ici.
3. Soit $M \in \mathbb{R}^{p \times p}$ $(p \geq 1)$ une matrice définie par blocs:
   $$M = \begin{pmatrix} A & B \\ B^\top & C \end{pmatrix},$$

où $A \in \mathbb{R}^{k\times k}, B \in \mathbb{R}^{k\times l}, C \in \mathbb{R}^{l\times l}$, $k+l=p$ et A et C sont symétriques. On suppose que C est inversible. On appelle le *complément de Schur* de C dans M la matrice $A - BC^{-1}B^\top \in \mathbb{R}^{k\times k}$. Montrer que M est semi-définie positive si et seulement si C et son complément de Schur dans M le sont.

4. Soit $M \in \mathbb{R}^{2d\times 2d}$ la matrice définie par blocs de la manière suivante:

$$M = \begin{pmatrix} \mathbb{E}[aa^\top] & \mathbb{E}[ab^\top] \\ \mathbb{E}[ba^\top] & \mathbb{E}[bb^\top] \end{pmatrix}.$$

   a) Montrer que M est semi-définie positive.
   b) Conclure.

Exercice 3 L'estimateur de Hodges

On considère une suite $X_1, X_2, \ldots$ de variables iid de loi $\mathcal{N}(\mu, 1)$, où $\mu \in \mathbb{R}$. Soit $\alpha \in (0,1)$. Pour $n \geq 1$, on définit

$$\hat{\mu}_n = \begin{cases} \bar{X}_n \text{ si } |\bar{X}_n| > n^{-1/4} \\ \alpha \bar{X}_n \text{ sinon.} \end{cases}$$

On cherche à démontrer que $\hat{\mu}_n$ est asymptotiquement normal autour de μ, de variance asymptotique strictement inférieure à l'inverse de l'information de Fisher, pour certaines valeurs de μ.

1. Calculer l'information de Fisher $I(\mu)$, pour $\mu \in \mathbb{R}$, associée au modèle paramétrique correspondant au problème.
2. Supposons $\mu = 0$.
   a) Montrer que $\mathbb{P}_0[|\bar{X}_n| > n^{-1/4}] \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.
   b) En déduire que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\mathbb{P}_0[\sqrt{n}\hat{\mu}_n \leq t] - \mathbb{P}_0[\sqrt{n}\bar{X}_n \leq t/\alpha] \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.
   c) Conclure quant à la normalité asymptotique de $\hat{\mu}_n$, et calculer sa variance asymptotique.
3. Supposons $\mu > 0$ (le cas $\mu < 0$ se traitant de manière similaire).
   a) Montrer que pour n assez grand, $\mathbb{P}_\mu[\bar{X}_n \leq n^{-1/4}] \leq \dfrac{1}{n(\mu - n^{-1/4})^2}$.
   b) En déduire que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\mathbb{P}_\mu[\sqrt{n}(\hat{\mu}_n - \mu) \leq t] - \mathbb{P}_\mu[\sqrt{n}(\bar{X}_n - \mu) \leq t] \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.
   c) Conclure quant à la normalité asymptotique de $\hat{\mu}_n$, et calculer sa variance asymptotique.
4. Conclure quant à la validité du programme de Fisher.

Exercice 4 Une inégalité de convexité

Soit $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ une fonction convexe et $a \in \mathbb{R}^d$.

1. Supposons que pour tout $x \in \mathbb{R}^d$, $\|x-a\|_2 = 1 \Rightarrow f(x) > f(a)$. Montrer que f est minorée, et qu'elle n'atteint son minimum qu'en des points $x \in \mathbb{R}^d$ satisfaisant $\|x-a\|_2 < 1$.
2. Plus généralement, soit K un ensemble compact contenant a en son intérieur. Supposons que pour tout $x \in \partial K$, $f(x) > f(a)$. Montrer que f est minorée, et qu'elle n'atteint son minimum qu'en des points qui sont dans l'intérieur de K.

Exercice 5 Des médianes empiriques à plusieurs vitesses

Soit $X_1, X_2, \dots$ des variables aléatoires réelles iid, et soit F leur fonction de répartition. Supposons la médiane unique, et notons-la m. Supposons aussi que F satisfait $F(x)-\frac{1}{2} \sim L_2(x-m)^\alpha$ lorsque $x \to m, x > m$ et $\frac{1}{2} - F(x) \sim L_1(m-x)^\alpha$ lorsque $x \to m, x < m$, où $\alpha \in (0,1]$ et $L_1, L_2 > 0$. Soit $\hat{m}_n$ une médiane empirique associée à $X_1, \dots, X_n$, pour tout $n \geq 1$. Pour simplifier, on prendra $\hat{m}_n = X_{(\lceil \frac{n}{2} \rceil)}$, où $X_{(1)}, \dots, X_{(n)}$ est l'échantillon réordonné des n premières variables $X_1, \dots, X_n$, et $\lceil t \rceil$ est le plus petit entier supérieur ou égal à t, pour tout réel t.

Montrer que $n^{\frac{1}{2\alpha}}(\hat{m}_n - m)$ converge en distribution vers une loi dont on calculera la fonction de répartition en fonction de celle de la loi normale centrée réduite. Interpréter ce résultat en termes de la vitesse de convergence de la médiane empirique vers la médiane théorique. On pourra s'inspirer de l'Exercice 3 de la Feuille 2.

Exercice 6 M-estimateurs et médiane empirique

Soit $X_1, X_2, \dots$ une suite de variables aléatoires iid à valeurs dans un intervalle $I \subseteq \mathbb{R}$ et admettant une densité (par-rapport à la mesure de Lebesgue) f continue et strictement positive sur I. Pour $x, t \in \mathbb{R}$, soit $\phi(x,t) = |x-t| - |x|$ et posons $\Phi(t) = \mathbb{E}[\phi(X,t)]$ et $\Phi_n(t) = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \phi(X_i, t)$, pour $n \geq 1$.

1. Montrer que X_1 admet une unique médiane, qu'on notera m, et que m est dans l'intérieur de I.
2. Montrer que $\Phi(t)$ est bien définie pour tout $t \in \mathbb{R}$.
3. Montrer que Φ est deux fois dérivable en m et que $\Phi''(m) > 0$.
4. Montrer que Φ admet un unique minimum, et qu'il s'agit de m.
5. En déduire qu'une médiane empirique $\hat{m}_n$, calculée à partir de $X_1, \dots, X_n$, pour tout $n \geq 1$, est asymptotiquement normale, et déterminer sa variance asymptotique.

Exercice 7 Estimateurs de Huber

Soit $X_1, X_2, \ldots$ une suite de variables aléatoires iid définies sur un intervalle $I \subseteq \mathbb{R}$ et admettant une densité (par-rapport à la mesure de Lebesgue) f continue et strictement positive sur I. Soit $c > 0$. On définit la fonction

$$\ell_c(u) = \begin{cases} u^2 \text{ si } |u| \leq c \\ 2c|u| - c^2 \text{ sinon.} \end{cases}$$

Pour $x, t \in \mathbb{R}$, soit $\phi(x,t) = \ell_c(x-t) - 2c|x|$ et posons $\Phi(t) = \mathbb{E}[\phi(X,t)]$ et $\Phi_n(t) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \phi(X_i, t)$, pour $n \geq 1$.

1. Montrer que $\Phi(t)$ est bien définie pour tout $t \in \mathbb{R}$.
2. Montrer Φ admet un unique minimum, qu'on notera m, que m est dans l'intérieur de I et que Φ est deux fois dérivable en m, avec $\Phi''(m) > 0$.
3. Montrer que pour tout $n \geq 1$, Φ_n admet au moins un minimiseur $\hat{m}_n$.
4. Montrer que $\hat{m}_n$ est asymptotiquement normal, et déterminer sa variance asymptotique à l'aide de f, m et c.