Statistique 3
2019-2020. Exercices d'entraînement : Approche Asymptotique (2)

Exercice 1 Une application du théorème de Slutsky

Soit $X_1, X_2, \ldots$, une suite de variables aléatoires i.i.d. de loi de Bernoulli, de paramètre $p \in (0,1)$. Pour tout $n \geq 1$, on note $\bar{X}_n$ la moyenne empirique de $X_1, \ldots, X_n$. En utilisant le théorème de Slutsky, montrer que $\sqrt{n}\frac{\bar{X}_n - p}{\sqrt{\bar{X}_n(1-\bar{X}_n)+1/n}}$ converge en distribution vers la loi normale centrée réduite. On prendra soin de justifier toutes les étapes.

Exercice 2 Une application multivariée du théorème de Slutsky

Soient $(A_n)_{n\geq 1}$ une suite de matrices aléatoires dans $\mathbb{R}^{d\times d}$ ($d \geq 1$) et $(T_n)_{n\geq 1}$ et $(Z_n)_{n\geq 1}$ deux suites de vecteurs aléatoires dans $\mathbb{R}^d$. On suppose que:

- Pour tout $n \geq 1$, $Z_n = A_n T_n$,
- A_n converge en probabilité vers une matrice déterministe $A \in \mathbb{R}^{d\times d}$ inversible,
- Z_n converge en distribution vers un vecteur aléatoire Z.

Montrer que T_n converge en distribution vers $A^{-1}Z$ *(On prendra soin de justifier toutes les étapes du raisonnement, et on remarquera qu'aucune hypothèse sur l'inversibilité de* A_n *n'a été faite).*

Exercice 3 Quantiles empiriques

Soit $\alpha \in (0,1)$ et ℓ_α la fonction qui à tout réel t associe αt si $t \geq 0$, $(\alpha - 1)t$ si $t < 0$. On note la fonction $\phi(x,t) = \ell_\alpha(x-t)$, $x, t \in \mathbb{R}$. Soit $X_1, X_2, \ldots$ une suite de variables aléatoires réelles i.i.d., admettant une densité (par-rapport à la mesure de Lebesgue) strictement positive sur $\mathbb{R}$. Pour $n \geq 1$, soit $\hat{q}_n$ un M-estimateur associé à la fonction ϕ.

1. Montrer que $\hat{q}_n$ est un quantile empirique d'ordre α de l'échantillon $X_1, \ldots, X_n$.
2. On note $X_{(1)} \leq \ldots \leq X_{(n)}$ les valeurs réordonnées de l'échantillon (montrer que les inégalités sont en fait larges presque sûrement). Montrer que $X_{(\lceil n\alpha\rceil)}$ est un quantile empirique d'ordre α. Dans la suite, pour simplifier, on prendra $\hat{q}_n = X_{(\lceil n\alpha\rceil)}$ (pour un réel t, $\lceil t\rceil$ est le plus petit entier supérieur ou égal à t).
3. On souhaite démontrer la normalité asymptotique de $\hat{q}_n$.

a) Montrer que la loi de X_1 admet un unique quantile d'ordre α, qu'on notera q.

b) Pour tout $t \in \mathbb{R}$, montrer que $\mathbb{P}[\sqrt{n}(\hat{q}_n - q) \leq t] = \mathbb{P}[N \geq n\alpha]$, où N est une variable binomiale de paramètres $n, F(q + t/\sqrt{n})$, et F est la fonction de répartition de X_1.

c) Quelle est la loi limite de $\dfrac{1}{\sqrt{n}}(N - nF(q + t/\sqrt{n}))$ lorsque $n \to \infty$? (*Indice: Utiliser les fonctions caractéristiques.*)

d) Conclure à l'aide du théroème de Slutsky.

Exercice 4 Un modèle non régulier

Soit $\theta > 0$ et $X_1, X_2, \ldots$ des variables aléatoires iid uniformément distribuées sur $[0, \theta]$.

1. Montrer que l'estimateur du maximum de vraisemblance $\hat{\theta}_n$ de θ est asymptotiquement exponentiel, avec pour vitesse de convergence n^{-1}.
2. $\log \theta_n$ est-il asymptotiquement exponentiel ?

Exercice 5 Un modèle semi-régulier

Soit $a \in \mathbb{R}$ et $\lambda > 0$. Soit $f(x) = \lambda e^{-\lambda(x-a)} \mathbb{1}_{x \geq a}, x \in \mathbb{R}$. Soit $X_1, X_2, \ldots$ des variables aléatoires iid de densité f et, pour tout $n \geq 1$, soit $(\hat{a}_n, \hat{\lambda}_n)$ l'estimateur du maximum de vraisemblance de (a, λ). Montrer que $\hat{a}_n$ est asymptotiquement exponentiel avec pour vitesse de convergence n^{-1} et que $\hat{\lambda}_n$ est asymptotiquement normal.

Exercice 6

Soit $\theta \in \mathbb{R}$ et $X_1, X_2, \ldots$ des variables aléatoires iid de loi $\mathcal{N}(\theta^3, 1)$.

1. Calculer l'estimateur du maximum de vraisemblance θ_n de θ, pour $n \geq 1$.
2. Montrer que $\hat{\theta}_n$ est consistent.
3. Pour quelles valeurs de θ l'estimateur $\hat{\theta}_n$ est-il asymptotiquement normal ?
4. En fonction de θ, trouver $\alpha > 0$ tel que $|\hat{\theta}_n - \theta| = O_{\mathbb{P}}(n^{-\alpha})$.