Optimisation avancée
2018-2019. Exercices d'entraînement (Chapître 3: Méthodes géométriques)

Exercice 1 Un algorithme de l'ellipsoïde

Soit $E \subseteq \mathbb{R}^d$ un ensemble convexe fermé et $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ une fonction convexe. On suppose l'existence de $a, b \in \mathbb{R}^d$ et $r, R > 0$ tels que $B(a, r) \subseteq E \subseteq B(b, R)$ et que pour tout $x \in E$, $|f(x)| \leq M$. Dans la suite, on suppose $b \in \mathbb{R}^d$, r, R et M connus (mais pas nécessairement a).

1. On considère l'algorithme de l'ellipsoïde pour la faisabilité décrit ci-dessous. Soit T le nombre total détapes de cet algorithme, i.e., la valeur finale de t.
   a) Décrire, en une phrase, l'objectif de cet algorithme.
   b) On veut montrer, en procédant par un raisonnement par l'absurde, que $T \leq \left\lceil 2d^2 \ln\left(\frac{R}{r}\right) \right\rceil$, où $\lceil\cdot\rceil$ est la partie entière supérieure (e.g., $\lceil\pi\rceil = 4$). Supposons donc que $T \geq \left\lceil 2d^2 \ln\left(\frac{R}{r}\right) \right\rceil + 1$.
   c) Montrer que pour tout $t = 1, \ldots, T$, $|S_t| \leq e^{-t/(2d)} R^d \omega_d$, où ω_d est le volume d'une boule Euclidienne de rayon 1.
   d) Soit $B = B(a, r)$. Montrer que pour tout $t = 1, \ldots, T-1$, $B \subseteq S_t$ et que cette inclusion est nécessairement stricte.
   e) Conclure.
2. On s'intéresse à présent à l'algorithme de l'ellipsoïde pour la minimisation d'une fonction convexe, décrit ci-dessous, similaire à celui vu en cours. Soit $\varepsilon > 0$. Supposons que $T \geq 2d^2 \ln\left(\frac{2MR}{\varepsilon r}\right)$. On veut montrer qu'alors l'algorithme garantit que $f(\hat{x}) \leq \min_E f + \varepsilon$.
   a) Montrer l'existence d'un élément x^* de E satisfaisant $f(x^*) = \min_E f$.
   b) Pour $\lambda \in [0, 1]$, soit $E_\lambda = x^* + \lambda(E - x^*)$. Montrer que pour tout $x \in E_\lambda$, $f(x) \leq f(x^*) + 2\lambda M$.
   c) Calculer le volume de E_λ et en déduire qu'en posant $\lambda = 2M/\varepsilon$, il existe $t^* \in \{1, \ldots, T\}$ et $x_\lambda \in E_\lambda$ tels que $x_\lambda \in S_{t^*-1}$ mais $x_\lambda \notin S_{t^*}$.
   d) Montrer que nécessairement, $c_{t^*-1} \in E$.
   e) Conclure.

Algorithm 1 Algorithme de l'ellipsoïde pour la faisabilité

$t = 0$;
$c_0 \leftarrow b, \quad H_0 \leftarrow R^2 I_d, \quad S_0 \leftarrow \mathcal{E}_{c_0,H_0}$.
while $c_t \notin E$ **do**
  Oracle de séparation: produire $w_t \in \mathbb{R}^d$ tel que $w_t^\top c_t \geq w_t^\top x, \forall x \in E$;
  Soit c_{t+1}, H_{t+1} de sorte que $\mathcal{E}_{c_{t+1},H_{t+1}}$ soit maintenant un ellipsoïde de volume minimal contenant $\{x \in S_t : w_t^\top x \leq w_t^\top c_t\}$;
  $S_{t+1} \leftarrow \mathcal{E}_{c_{t+1},H_{t+1}}$
  $t \leftarrow t + 1$
end while
print c_t

Algorithm 2 Algorithme de l'ellipsoïde pour la minimisation d'une fonction convexe

$c_0 \leftarrow b, \quad H_0 \leftarrow R^2 I_d, \quad S_0 \leftarrow \mathcal{E}_{c_0,H_0}$.
for $t = 1$ TO T **do**
  Appel à l'oracle de séparation:
  if $c_{t-1} \in E$ **then**
    Soit $w_{t-1} \in \partial f(c_{t-1})$;
  else
    Soit $w_{t-1} \in \mathbb{R}^d$ tel que $w_{t-1}^\top c_{t-1} \geq w_{t-1}^\top x, \forall x \in E$;
  end if
  Soit c_t, H_t de sorte que $\mathcal{E}_{c_t,H_t}$ soit maintenant un ellipsoïde de volume minimal contenant $\{x \in S_{t-1} : w_{t-1}^\top x \leq w_{t-1}^\top c_{t-1}\}$;
  $S_t \leftarrow \mathcal{E}_{c_t,H_t}$
end for
$\hat{x} \leftarrow \arg\min_{x \in \{c_0,\ldots,c_T\} \cap E} f(x)$