# Optimisation avancée
# 2018-2019. Exercices d'entraînement (Chapître 2 - Convexité et dualité)

## Exercice 1

Soit $A \in \mathbb{R}^{d\times d}$ et $E = \{x \in \mathbb{R}^d : x^\top Ax \leq 1\}$.

1. Montrer l'existence d'une matrice symétrique $\tilde{A} \in \mathbb{R}^{d\times d}$ telle que $E = \{x \in \mathbb{R}^d : x^\top \tilde{A}x \leq 1\}$. Dorénavant, on supposera donc que $A$ est symétrique, sans perte de généralité.
2. Montrer que $E$ est un ensemble fermé.
3. Montrer que $E$ est convexe si et seulement si les valeurs propres de $A$ sont toutes de même signe.
4. Montrer que $E$ est borné si et seulement si toutes les valeurs propres de $A$ sont strictement positives.
5. Supposons que $A$ est définie positive. Trouver une matrice $T \in \mathbb{R}^{d\times d}$ telle que $E = TB(0,1) = \{Tx : x \in B(0,1)\}$.

## Exercice 2 Programmation linéaire et dualité

Soit $n \geq 1$, $A \in \mathbb{R}^{n\times d}$, $b \in \mathbb{R}^n$ et $c \in \mathbb{R}^d$. On suppose que l'ensemble $\{x \in \mathbb{R}^d : Ax \leq b\}$ est borné.

1. Montrer que nécessairement, $n \geq d+1$.
2. On considère le programme linéaire suivant:

$$(P) \quad \min_{x\in\mathbb{R}^d} \begin{cases} c^\top x \\ \text{s.c. } Ax \leq b. \end{cases}$$

   Ecrire le problème dual, qu'on notera $(Q)$.
3. Montrer que $(P)$ est le probléme dual de $(Q)$.

## Exercice 3 L'oracle de séparation

Soit $f_1, \ldots, f_n$ des fonctions convexes sur $\mathbb{R}^d$, où $n \geq 1$ et $E = \{x \in \mathbb{R}^d : f_i(x) \leq 0, i = 1, \ldots, n\}$.

1. Montrer qu'on peut réécrire $E$ comme $\{x \in \mathbb{R}^d : f(x) \leq 0\}$, où $f$ est une fonction convexe sur $\mathbb{R}^d$ à déterminer.

2. Proposer un algorithme produisant l'oracle de séparation pour tout $x \in \mathbb{R}^d$ par-rapport à $E$, en faisant appel aux oracles d'ordres zéro et un de $f$.

### Exercice 4

Soit $E \subseteq \mathbb{R}^d$ un ensemble convexe et $f : E \to \mathbb{R}$ une fonction convexe. Montrer que pour tout $x \in \mathring{E}$, $\partial f(x)$ est convexe et compact.

### Exercice 5

Dans chacun des cas suivants, calculer l'ensemble des sous-gradients de $f$ en un point quelconque du domaine.

- $f(x) = x^2, x \in \mathbb{R}$.
- $f(x) = -x^2, x \in \mathbb{R}$.
- $f(x) = c^\top x, x \in \mathbb{R}^d$, où $c \in \mathbb{R}^d$.
- $f(x) = \|x\|^2, x \in \mathbb{R}^d$.
- $f(x) = \|x\|, x \in \mathbb{R}^d$.
- $f(x) = |c^\top x|, x \in \mathbb{R}^d$, où $c \in \mathbb{R}^d$.
- $f(x) = \|x\|_1, x \in \mathbb{R}^d$.
- $f(x) = \|x\|_\infty, x \in \mathbb{R}^d$.
- $f(x) = \|Ax\|, x \in \mathbb{R}^n$, où $A \in \mathbb{R}^{d\times n}$.
- $f(x) = \|Ax\|_1, x \in \mathbb{R}^n$, où $A \in \mathbb{R}^{d\times n}$.
- $f(x) = \|Ax\|_\infty, x \in \mathbb{R}^n$, où $A \in \mathbb{R}^{d\times n}$.

### Exercice 6

Montrer que toute fonction fortement convexe sur $\mathbb{R}^d$ est minorée et atteint son minimum.

### Exercice 7 Fonction de support

Soit $E \subseteq \mathbb{R}^d$ un ensemble convexe et compact. La fonction de support de $E$ est la fonction $h_E$ définie par $h_E(u) = \max_{x\in E} u^\top x$, pour tout $u \in \mathbb{R}^d$.

1. Calculer la fonction de support des ensembles suivants:
   - $B(0,1)$;
   - $B(a,R)$, où $a \in \mathbb{R}^d$ et $R \geq 0$;
   - $B_\infty(0,1)$;
   - $B_1(0,1)$;
   - $B_p(0,1)$, où $p \geq 1$.
2. Montrer que $h_E$ est homogène (i.e., $h_E(\lambda x) = \lambda h_E(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^d$ et $\lambda \geq 0$) et convexe.
3. Réciproquement, soit $h : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ une fonction homogène et convexe. Montrer l'existence d'un ensemble convexe et compact $E \subseteq \mathbb{R}^d$ tel que $h = h_E$.
   *Indice: Considérer l'ensemble* $\{x \in \mathbb{R}^d : \forall u \in \mathbb{S}^{d-1}, u^\top x \leq h(u)\}$, *où* $\mathbb{S}^{d-1}$ *est la sphère unité dans* $\mathbb{R}^d$.

## Exercice 8

Soit $E \subseteq \mathbb{R}^d$ un ensemble convexe fermé et $y \in \mathbb{R}^d$. Soit $y^* = \pi_E(y)$ le projeté de $y$ sur $E$. Montrer que pour tout $x \in E$, $\|y - x\| \geq \|y^* - x\|$. Cette propriété caractérise-t-elle le projeté $y^*$ de $y$ sur $E$ ?

## Exercice 9

Soit $E \subseteq \mathbb{R}^d$ un ensemble convexe et $f : E \to \mathbb{R}$ une fonction convexe. Soit $L > 0$.

1. Supposons que $E = \mathbb{R}^d$. Montrer que $f$ est $L$-Lipschitzienne si et seulement si pour tout $x \in \mathbb{R}^d$ et pour tout $u \in \partial f(x)$, $\|u\| \leq L$.
2. Cette équivalence reste-t-elle vraie si $E \neq \mathbb{R}^d$ ?

## Exercice 10

Soit $f : \mathbb{R}^d$ une fonction convexe $\beta$-régulière, où $\beta > 0$. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^d$,

$$f\left(x - \frac{1}{\beta}\nabla f(x)\right) - f(x) \leq -\frac{1}{2\beta}\|\nabla f(x)\|^2$$

et, plus généralement, pour tous $x, y \in \mathbb{R}^d$,

$$f\left(x - \frac{1}{\beta}\nabla f(x)\right) - f(y) \leq \nabla f(x)^\top (x - y) - \frac{1}{2\beta}\|\nabla f(x)\|^2$$

Exercice 11

Soit $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ une fonction quelconque et $\alpha > 0$. Montrer que $f$ est $\alpha$-fortement convexe si et seulement si $x \mapsto f(x) - \frac{\alpha}{2}\|x\|^2$ est convexe.

Exercice 12

Montrer que toute fonction fortement convexe sur $\mathbb{R}^d$ atteint son minimum en un et un seul point de $\mathbb{R}^d$.