# Optimisation avancée 2018-2019. Preuves supplémentaires

## 1 Chapitre 2: Convexité et dualité

**Proposition 1.** *Soit $E \subseteq \mathbb{R}^d$ un ensemble convexe et $f : E \to \mathbb{R}$ une fonction convexe. Alors $f$ est continue sur l'intérieur de $E$.*

Afin de prouver cette proposition, on démontre d'abord le lemme suivant.

**Lemme 1.** *Soit $E \subseteq \mathbb{R}^d$ un ensemble convexe et $f : E \to \mathbb{R}$ une fonction convexe. Alors $f$ est localement bornée sur l'intérieur de $E$, i.e., pour tout $x \in \mathring{E}$, il existe $\varepsilon > 0$ et $M \in \mathbb{R}$ tels que $B(x,\varepsilon) \subseteq E$ et $\forall y \in B(x,\varepsilon), f(y) \leq M$.*

**Preuve.** Soit $x \in \mathring{E}$. Alors il existe $\varepsilon > 0$ tel que $B_\infty(x,\varepsilon) \subseteq E$. Les sommets du polytope $B_\infty(x,\varepsilon)$ sont les points de la forme $X_\omega = x + \varepsilon\omega$ où $\omega \in \{-1,1\}^d$. Ils sont en nombre fini, on peut donc définir $M = \max_{\omega \in \{-1,1\}^d} f(x+\varepsilon\omega)$. Soit $y \in B_\infty(x,\varepsilon)$. Alors $y$ peut s'écrire comme une combinaison convexe des sommets de $B_\infty(x,\varepsilon)$: il existe une famille de nombres positifs $(\lambda_\omega)_{\omega \in \{-1,1\}^d}$, de somme 1, telle que

$$y = \sum_{\omega \in \{-1,1\}^d} \lambda_\omega X_\omega.$$

Ainsi, par convexité de $f$,

$$f(y) \leq \sum_{\omega \in \{-1,1\}^d} \lambda_\omega f(X_\omega) \leq M.$$

Donc, comme $B(x,\varepsilon) \subseteq B_\infty(x,\varepsilon)$, on a, pour tout $y \in B(x,\varepsilon)$ $f(y) \leq M$. $\square$

**Preuve de la Proposition 1.** Soit $x \in \mathring{E}$. On va démontrer que $f$ est continue en $x$. D'après le lemme précédent, on peut trouver $\varepsilon > 0$ et $M \in \mathbb{R}$ tels que $B(x,\varepsilon) \subseteq E$ et $\forall y \in B(x,\varepsilon), f(y) \leq M$.

Soit $y \in B(x,\varepsilon) \setminus \{x\}$. Soit $z_1 = x + \frac{\varepsilon}{\|y-x\|}(y-x)$ et $z_2 = x - \frac{\varepsilon}{\|y-x\|}(y-x)$: il s'agit des points de la droite affine reliant $x$ et $y$, se trouvant sur le bord de $B(x,\varepsilon)$. L'idée est d'exprimer $y$ comme combinaison convexe de $x$ et $z_1$, puis $x$ comme combinaison convexe de $y$ et $z_2$, afin de borner $|f(y) - f(x)|$. Il est facile de voir que $y = x + \lambda(z_1 - x)$ et $x = y + \mu(z_2 - y)$, où $\lambda = \dfrac{\|y - x\|}{\varepsilon} \in [0,1]$ et $\mu = \dfrac{\|y - x\|}{\|y - x\| + \varepsilon} \in [0,1]$. Alors, par convexité de $f$,

$$f(y) \leq f(x) + \lambda(f(z_1) - f(x)) \leq f(x) + \lambda(M - f(x))$$

et

$$f(x) \leq f(y) + \mu(f(z_2) - f(y)),$$

d'où $f(y) \geq f(x) + \dfrac{\mu}{1-\mu}(f(x) - f(z_2)) \geq f(x) + \dfrac{\mu}{1-\mu}(f(x) - M) = f(x) + \lambda(f(x) - M)$. Ainsi, on conclut que $|f(y) - f(x)| \leq \lambda(f(x) - M)$, qui tend vers zéro lorsque $y$ tend vers $x$ (car $\lambda$ tend vers zéro). □

**Proposition 2.** *Soit $E \subseteq \mathbb{R}^d$ un ensemble convexe et $f : E \to \mathbb{R}$ une application continue. Alors $f$ est convexe si et seulement si pour tout $x, y \in E$, $f\left(\dfrac{x+y}{2}\right) \leq \dfrac{f(x)+f(y)}{2}$.*

**Preuve.** L'implication directe étant évidente par définition de la convexité, on ne prouve que l'autre direction. Soit $x, y \in E$ et $\lambda \in [0,1]$. Ecrivons la décomposition de $\lambda$ en base 2: $\lambda = \sum_{k=1}^{\infty} \dfrac{a_k}{2^k}$, où pour tout $k \geq 1$, $a_k \in \{0,1\}$. Soit $z = \lambda x + (1-\lambda)y$. On cherche à montrer que $f(z) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y)$. Pour $n \geq 1$, posons $\lambda_n = \sum_{k=1}^{n-1} \dfrac{a_k}{2^k}$ ($\lambda_1 = 0$) et $\lambda'_n = \lambda_n + \dfrac{1}{2^n}$: ce sont les troncatures par défaut et par excès de $\lambda$ à l'ordre $n$. Posons aussi $z_n = \lambda_n x + (1-\lambda_n)y$ et $z'_n = \lambda'_n x + (1-\lambda'_n)y$. Montrons par récurrence que pour tout $n \geq 1$,

$$f(z_n) \leq \lambda_n f(x) + (1-\lambda_n) f(y) \tag{1}$$

et

$$f(z'_n) \leq \lambda'_n f(x) + (1-\lambda'_n) f(y). \tag{2}$$

Pour $n = 1$, $\lambda_1 = 0$ donc (1) est évidente, et $\lambda'_1 = 1/2$ donc (2) découle de l'hypothèse sur $f$. Soit $n \geq 1$ et supposons (1) et (2) vraies. Si $a_n = 0$, alors $\lambda_{n+1} = \lambda_n$ et $\lambda'_{n+1} = \lambda'_n + \dfrac{1}{2^{n+1}}$. Dans ce cas, $z_{n+1} = z_n$, donc

$$\begin{aligned} f(z_{n+1}) &= f(z_n) \\ &\leq \lambda_n f(x) + (1-\lambda_n) f(y) \text{ par (1)} \\ &= \lambda_{n+1} f(x) + (1-\lambda_{n+1}) f(y) \end{aligned}$$

et il est facile de vérifier que $z'_{n+1} = \dfrac{z_n + z'_n}{2}$, donc par hypothèse sur $f$,

$$\begin{aligned} f(z'_{n+1}) &\le \frac{f(z_n) + f(z'_n)}{2} \\ &\le \frac{\lambda_n f(x) + (1-\lambda_n) f(y) + \lambda'_n f(x) + (1-\lambda'_n) f(y)}{2} \text{ par (1) et (2)} \\ &= \lambda'_{n+1} f(x) + (1-\lambda'_{n+1}) f(y). \end{aligned}$$

Donc (1) et (2) sont toujours vraies au rang $n+1$. Le cas où $a_n = 1$ se traite de la même manière. A présent, (1) étant vraie pour tout $n \ge 1$ (le fait que (2) est aussi vraie n'était utile que pour faire marcher la récurrence), on peut y passer à la limite lorsque $n \to \infty$, par continuité de $f$, afin de conclure. $\square$