Optimisation avancée
2018-2019. Exercices d'entraînement (Chapître 1: Idées générales)

Exercice 1

Soit $L > 0$ et $\mathcal{F}_L$ l'ensemble des applications L-Lipschitziennes de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$. Soit $\varepsilon > 0$. Soit $\mathcal{A}$ un algorithme renvoyant, pour toute fonction $f \in \mathcal{F}_L$, un nombre $x^* \in [0,1]$ tel que $f(x^*) \leq \min_{[0,1]} f + \varepsilon$. On suppose que $\mathcal{A}$ fait uniquement appel à l'oracle d'ordre zéro.

1. Montrer que $\mathcal{A}$ doit faire appel à l'oracle d'ordre zéro au moins $\Omega(L/\varepsilon)$ fois.
   Indice: Considérer la fonction nulle, et construire une fonction $g \in \mathcal{F}_L$ valant zéro en tous les points en lesquels l'oracle d'ordre zéro est appelé pour la fonction nulle, dont le minimum est le plus petit possible.
2. En déduire la complexité optimale sur $\mathcal{F}_L$, en fonction de L et ε, pour les algorithmes ne faisant appel qu'à l'oracle d'ordre zéro.

Exercice 2

Soit $P = \{x \in \mathbb{R}^d : a_i^\top x \leq b_i, i = 1, \ldots, n\}$ un polytope supposé borné, où $n \geq 1$, $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}^d$ et $b_1, \ldots, b_n \in \mathbb{R}$. On dit qu'un point $x \in P$ est un *centre de Chebychev* de P si et seulement si x est le centre d'une boule de volume maximal incluse dans P.

1. Montrer qu'une telle boule existe. Est-elle nécessairement unique ?
2. Montrer que le centre et le rayon d'une telle boule sont une solution d'un programme linéaire.

Exercice 3 Estimateur Ridge en régréssion linéaire

Soit $A \in \mathbb{R}^{n \times d}$ (n est un entier supérieur ou égal à d) une matrice de rang d et $y \in \mathbb{R}^n$. On considère les problèmes d'optimisation suivants:

$$(P_\lambda) \qquad \min_{x \in \mathbb{R}^d} \|y - Ax\|^2 + \lambda \|x\|^2$$

et

$$(Q_\tau) \qquad \min_{x \in \mathbb{R}^d} \begin{cases} \|y - Ax\| \\ \text{s.c. } \|x\| \leq \tau, \end{cases}$$

où λ et τ sont deux nombres positifs.

1. Résoudre (P_λ) et (Q_τ) analytiquement.

2. Montrer que pour tout $\lambda > 0$, il existe $\tau(\lambda) > 0$ tel que les problèmes (P_λ) et $(Q_{\tau(\lambda)})$ sont équivalents.
3. Réciproquement, montrer que pour tout $\tau > 0$, il existe $\lambda(\tau) \geq 0$ tel que les problèmes (Q_τ) et $(P_{\lambda(\tau)})$ sont équivalents.

Exercice 4 Estimateur Lasso en régréssion linéaire

Soit $A \in \mathbb{R}^{n\times d}$ (cette fois-ci, n est un entier quelconque) et $y \in \mathbb{R}^n$. On considère les problèmes d'optimisation suivants:

$$(P_\lambda) \quad \min_{x\in\mathbb{R}^d} \|y - Ax\|^2 + \lambda\|x\|_1$$

et

$$(Q_\tau) \quad \min_{x\in\mathbb{R}^d} \begin{cases} \|y - Ax\| \\ \text{s.c. } \|x\|_1 \leq \tau, \end{cases}$$

où λ et τ sont deux nombres positifs.

1. Montrer que pour tout $\lambda > 0$, il existe $\tau(\lambda) > 0$ tel que les problèmes (P_λ) et $(Q_{\tau(\lambda)})$ sont équivalents.
2. Réciproquement, montrer que pour tout $\tau > 0$, il existe $\lambda(\tau) \geq 0$ tel que les problèmes (Q_τ) et $(P_{\lambda(\tau)})$ sont équivalents.
3. Montrer que pour tout $\tau > 0$, (Q_τ) peut s'écrire comme un programme linéaire. En pratique, pensez-vous que cela est utile pour la résolution du probléme ?

Exercice 5

Ecrire les problèmes suivants sons la forme d'un programme linéaire, si possible, ou d'un programme quadratique sinon.

1. $$\min_{x\in\mathbb{R}^d} \|Ax - b\|^2,$$
   où $A \in \mathbb{R}^{n\times d}$ et $b \in \mathbb{R}^n$, avec $n \geq 1$.
2. $$\min_{x\in\mathbb{R}^d} \begin{cases} \|Ax - b\| \\ \text{s.c. } x \in B(x_0, r), \end{cases}$$
   où $A \in \mathbb{R}^{n\times d}$ et $b \in \mathbb{R}^n$, avec $n \geq 1$, $X_0 \in \mathbb{R}^d$ et $r > 0$.
3. (*Square-root Lasso*)
   $$\min_{x\in\mathbb{R}^d} \|y - Ax\| + \lambda\|x\|_1,$$
   où $A \in \mathbb{R}^{n\times d}$ et $b \in \mathbb{R}^n$, avec $n \geq 1$ et $\lambda > 0$.